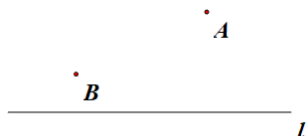


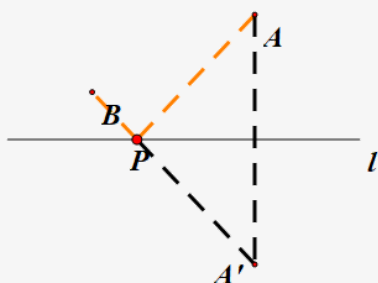
第2讲将军饮马

一、 线段和最小

如图，在 l 上找一点 P ，使 $PA + PB$ 最小.

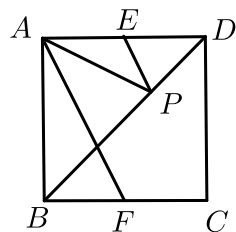


【备注】作法：作点 A 关于 l 对称的点 A' ，连接 A' 、 B ，与 l 的交点即为点 P .



栗子1

1. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， E ， F 分别为 AD ， BC 的中点， P 为对角线 BD 上的一个动点，则下列线段的长等于 $AP + EP$ 最小值的是（ ）.



A. AB

B. DE

C. BD

D. AF

【答案】D

【解析】方法一：根据正方形的性质得点 A 关于 BD 的对称点为 C 点，

$\therefore$ 连接 EC 交 BD 于点 P ，此时 $AP + EP$ 的值最小.

$\therefore AP + EP = EC$.

$\therefore$ 在正方形 $ABCD$ 中， E ， F 分别是 AD ， BC 的中点，

$$\therefore AB = CD = AD = BC, \angle ABF = \angle CDE = 90^\circ, DE = \frac{1}{2}AD, BF = \frac{1}{2}BC$$

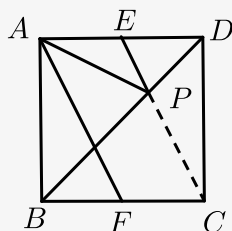
,

$$\therefore DE = BF,$$

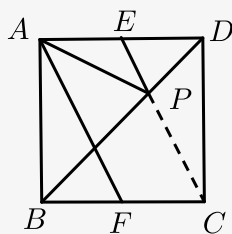
$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CDE,$$

$$\therefore CE = AF,$$

$\therefore AP + EP$ 的最小值等于线段 AF 的长.



方法二：如图，连接 CP ，



由 $AD = CD$, $\angle ADP = \angle CDP = 45^\circ$, $DP = DP$, 可得 $\triangle ADP \cong \triangle CDP$,

$$\therefore AP = CP,$$

$$\therefore AP + PE = CP + PE,$$

$\therefore$ 当点 E, P, C 在同一直线上时, $AP + PE$ 的最小值为 CE 的长,

$\therefore$ 在正方形 $ABCD$ 中, E, F 分别为 AD, BC 的中点,

$$\therefore AB = CD, AD = BC, \angle ABF = \angle CDE = 90^\circ, DE = \frac{1}{2}AD, BF = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore DE = BF,$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CDE,$$

$$\therefore AF = CE,$$

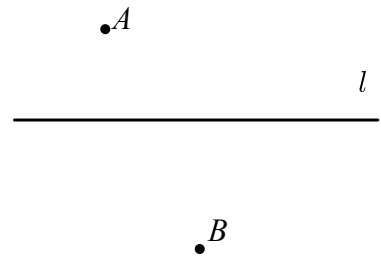
$\therefore AP + EP$ 的最小值等于线段 AF 的长.

故选：D.

【标注】【知识点】线段和的最小值

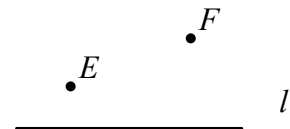
2.

(1) 如图①, 点 A, B 在直线 l 两侧, 请你在直线 l 上画出一點 P , 使得 $PA + PB$ 的值最小, 简述画法、画出图形.



图①

(2) 如图②，点 E 、 F 在直线 l 同侧，请在直线 l 上画出一點 Q ，使得 $QE + QF$ 的值最小，简述画法并画出示意图．

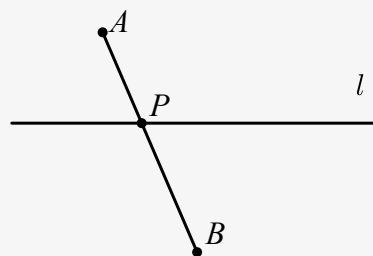


图②

【答案】(1) 画图见解析.

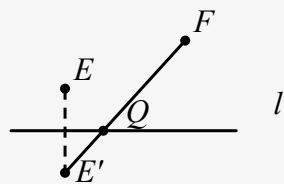
(2) 画图见解析.

【解析】(1) 如下图所示，连接 AB ，交直线 l 于点 P ，则点 P 即为所求点．



图①

(2) 如下图所示，作点 E 关于直线 l 的对称点 E' ，连接 $E'F$ 交直线 l 于点 Q ，则点 Q 即为所求点．

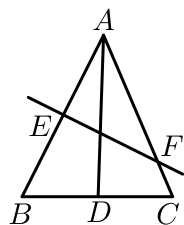


图②

【标注】【知识点】线段和的最小值

栗子2

3. 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $BC = 5$ ， $S_{\triangle ABC} = 15$ ， $AD \perp BC$ 于点 D ， EF 垂直平分 AB ，交 AC 于点 F ，在 EF 上确定一点 P ，使 $PB + PD$ 最小，则这个最小值为 _____ .



【答案】6

【解析】 $\because AB = AC$ ， $BC = 5$ ， $S_{\triangle ABC} = 15$ ， $AD \perp BC$ 于点 D ，

$\therefore AD = 6$ ，

$\because EF$ 垂直平分 AB ，

$\therefore$ 点 P 到 A ， B 两点的距离相等，

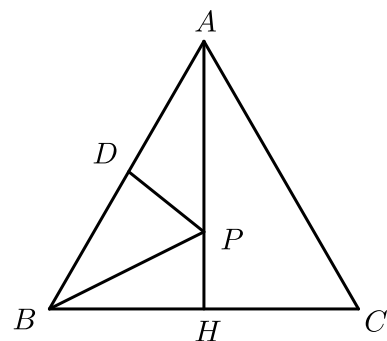
$\therefore AD$ 的长度 = $PB + PD$ 的最小值，

即 $PB + PD$ 的最小值为6 .

故答案为：6 .

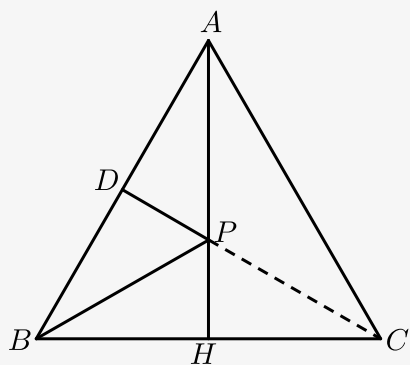
【标注】【知识点】线段和的最小值

4. 如图所示，已知 $\triangle ABC$ 为等边三角形，高 $AH = 10\text{cm}$ ， P 为 AH 上一动点， D 为 AB 的中点，则 $PD + PB$ 的最小值为 _____ cm .



【答案】 10

【解析】 连接 DC 交 AH 于点 P ,



$\because \triangle ABC$ 为等边三角形, D 为 AB 的中点,

$\therefore PD + PB$ 的最小值为: $PD + PB = PC + PD = CD = AH = 10\text{cm}$.

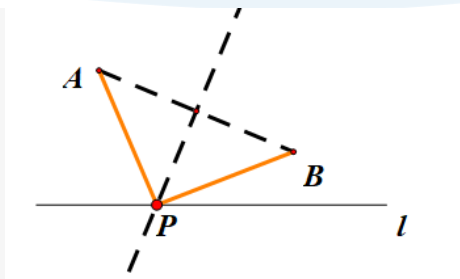
【标注】 【知识点】 线段和的最小值

二、 线段差最值

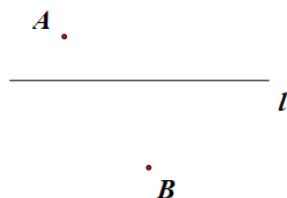
1、 如图, 在 l 上找一点 P , 使 $|PA - PB|$ 最小.



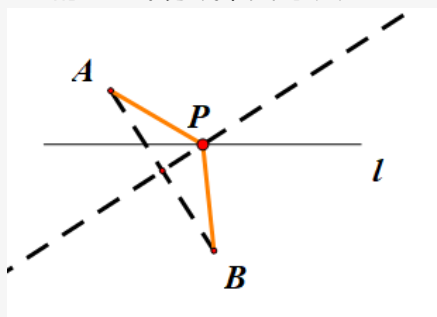
【备注】 作法: 连接 A 、 B , 作线段 AB 的垂直平分线, 交 l 于点 P .



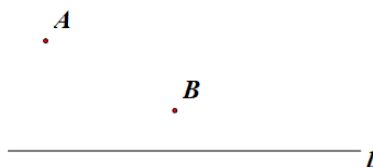
2、如图，在 l 上找一点 P ，使 $|PA - PB|$ 最小.



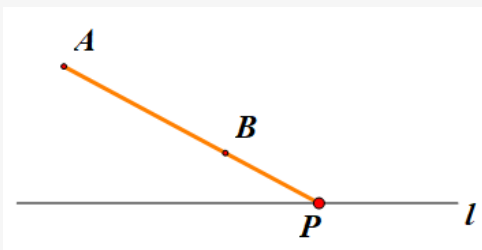
【备注】作法：连接 A 、 B ，作线段 AB 的垂直平分线，交 l 于点 P .



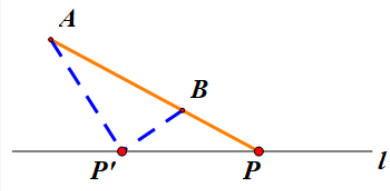
3、如图，在 l 上找一点 P ，使 $|PA - PB|$ 最大.



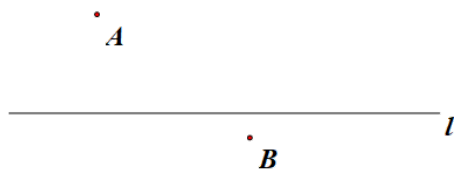
【备注】作法：过点 A 、 B 作直线 AB ，交 l 于点 P .



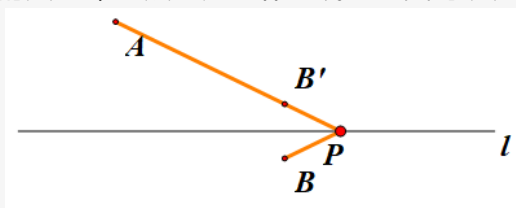
【备注】证明方法： $|PA - PB|_{\max} = AB$ ，其他位置点 P' ， $|P'A - P'B| < AB$.
理由：三角形两边之差小于第三边.



4、如图，在 l 上找一点 P ，使 $|PA - PB|$ 最大.

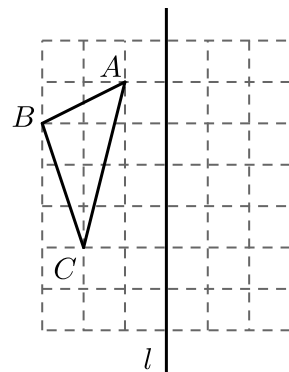


【备注】作法：作点 B 关于 l 对称的点 B' ，过点 A 、 B' 作直线 AB' 交 l 于点 P .



栗子3

5. 如图，在长度为1个单位长度的小正方形组成的网格中，点 A ， B ， C 均在小正方形的顶点上．



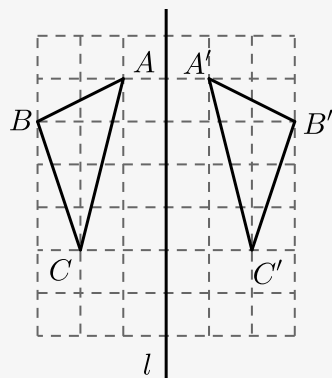
- (1) 在图中画出与 $\triangle ABC$ 关于直线 l 成轴对称的 $\triangle A'B'C'$ ．
- (2) 直接写出 $\triangle A'B'C'$ 的面积为 _____ ．
- (3) 在直线 l 上找一点 M ，使 $|MA - MB|$ 最小，找一点 N ，使 $|NA - NB|$ 最大．

【答案】(1) 画图见解析.

(2) $\frac{7}{2}$

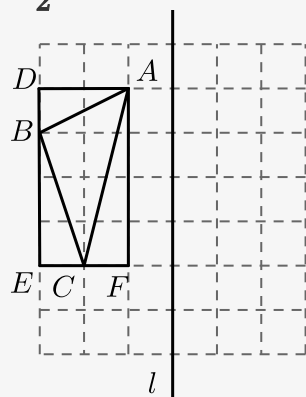
(3) 画图见解析, $|MA - MB|_{\min} = 0$; $|NA - NB|_{\max} = \sqrt{5}$.

【解析】(1) 如图:



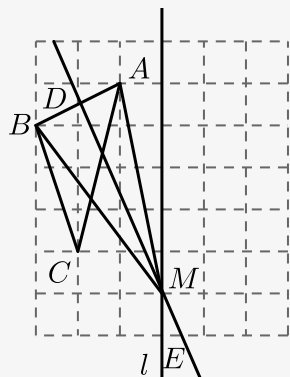
(2) $S_{\triangle A'B'C'} = S_{\triangle ABC}$

$$\begin{aligned} &= S_{\text{矩形} ADEF} - S_{\triangle ABD} - S_{\triangle BCE} - S_{\triangle ACF} \\ &= 2 \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 \times 1 - \frac{1}{2} \times 3 \times 1 - \frac{1}{2} \times 4 \times 1 \\ &= 8 - 1 - \frac{3}{2} - 2 \\ &= \frac{7}{2}. \end{aligned}$$



(3) ①取AB中点D,

过点D作DE⊥AB交l于M,

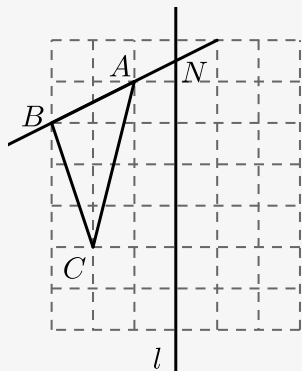


则DE为AB的中垂线,

$$\therefore MA = MB,$$

$$\therefore |MA - MB|_{\min} = 0.$$

②延长BA交l于N点,



$$\text{则 } |NA - NB| \geq AB,$$

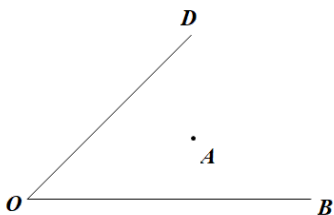
当A, B, N三点共线时,

$$|NA - NB|_{\max} = AB = \sqrt{5}.$$

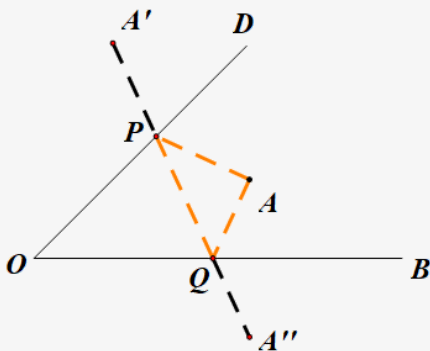
【标注】【知识点】线段差的绝对值最小

三、三角形周长最小

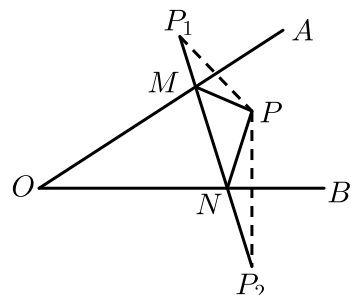
如图,点A在锐角 $\angle DOB$ 的内部,在OD边上求作一点P,在OB边上求作一点Q,使 $\triangle PAQ$ 的周长最小(或者使得 $PA + QA$ 最小).



【备注】作法:作点A关于OD对称的点A',作点A关于OB对称的点A'',连接A'、A'',分别交OD于点P,交OB与点Q.



6. 如图，点 P 为 $\angle AOB$ 内一点，分别作出 P 点关于 OA 、 OB 的对称点 P_1 、 P_2 ，连接 P_1P_2 交 OA 于点 M ，交 OB 于点 N ， $P_1P_2 = 15$ ，则 $\triangle PMN$ 的周长为（ ）。



- A. 14 B. 15 C. 16 D. 17

【答案】 B

【解析】 如图， $\because P$ 点关于 OA 、 OB 的对称点 P_1 、 P_2 ，

$$\therefore P_1M = PM, P_2N = PN,$$

$$\triangle PMN \text{ 的周长} = MN + PM + PN = MN + P_1M + P_2N = P_1P_2,$$

$$\because P_1P_2 = 15,$$

$$\therefore \triangle PMN \text{ 的周长为 } 15.$$

故选：B.

【标注】 【知识点】 三角形的周长与面积问题

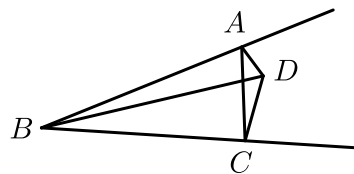
【知识点】 线段的垂直平分线的性质定理

【知识点】 轴对称的性质

【思想】 转化与化归思想

【能力】 推理论证能力

7. 如图， D 是 $\angle ABC$ 内一点， $BD = 4$ ， $\angle ABC = 30^\circ$ ，设 M 是射线 BA 上一点， N 是射线 BC 上一点，则 $\triangle MND$ 的周长的最小值是 _____。



【答案】 4

【解析】

作 D 关于 BA , BC 的对称点 E , F . 连接 BE , BF . 则当 M , N 是 EF 与 BA , BC 的交点时, $\triangle MND$ 的周长最短, 最短的值是 EF 的长.

连接 BE 、 BF ,

$\because D$ 、 E 关于 BA 对称, $BE = BD$,

$\therefore \angle ABE = \angle ABD$,

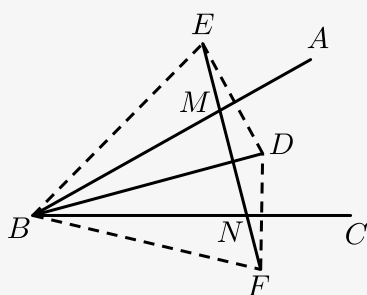
同理, $\angle FBC = \angle DBC$, $BF = BD$,

$\therefore \angle EBF = 2\angle ABC = 60^\circ$, $BE = BF$,

$\therefore \triangle BEF$ 是等边三角形.

$\therefore EF = BE = BD = 4$.

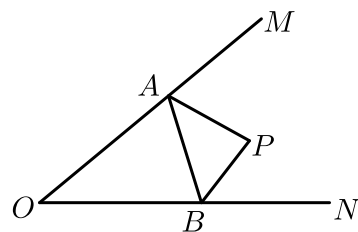
故答案是: 4.



【标注】【知识点】线段和的最小值

栗子5

8. 已知如图所示, $\angle MON = 40^\circ$, P 为 $\angle MON$ 内一点, A 为 OM 上一点, B 为 ON 上一点, 则当 $\triangle PAB$ 的周长取最小值时, $\angle APB$ 的度数为 _____ $^\circ$.



【答案】100

【解析】分别作点 P 关于 ON 、 OM 的对称点 P' 、 P'' , 连接 OP' 、 OP'' 、 $P'P''$,

显然 $\triangle PAB$ 的周长 $PA + AB + PB = P'B + AB + P'A$,

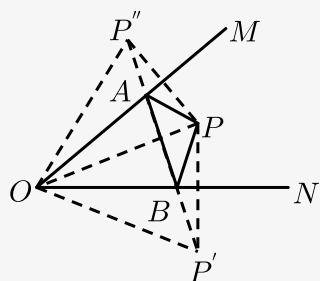
由两点间线段最短, 故 $\triangle PAB$ 的最小周长为 $P'P''$,

$\because \angle MON = 40^\circ$, $OP = OP' = OP''$,

$\therefore \triangle P'OP''$ 是等腰三角形,

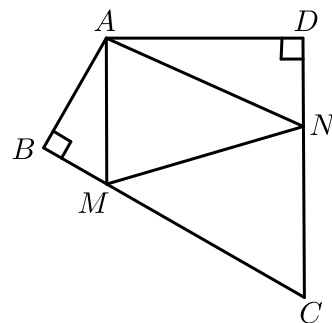
此时 $\angle OP'P' = \angle OP'P' = 50^\circ$

$\therefore \angle APB = \angle OP'P' + \angle OP'P' = 100^\circ$.



【标注】【知识点】三角形周长最小

9. 如图，四边形 $ABCD$ 中， $\angle BAD = 120^\circ$ ， $\angle B = \angle D = 90^\circ$ ，在 BC 、 CD 上分别找一点 M 、 N ，使 $\triangle AMN$ 周长最小，求此时 $\angle AMN + \angle ANM =$ _____ 度以及 $\angle MAN =$ _____ 度。



【答案】120；60

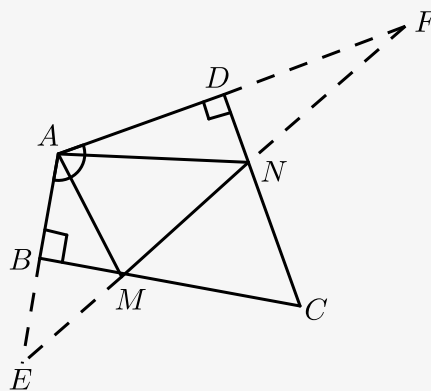
【解析】如图，分别作 A 关于 BC 、 CD 的轴对称点 E 、 F

连接 EF 与 BC 、 CD 交于 M 、 N ，此时

$\triangle AMN$ 周长最小。

$\angle AMN = 2\angle E$

$\angle ANM = 2\angle F$



$\angle AMN + \angle ANM = 2\angle E + 2\angle F = 2(\angle E + \angle F)$

在 $\triangle AEF$ 中易知 $\angle E + \angle F = 180^\circ - \angle BAC = 60^\circ$

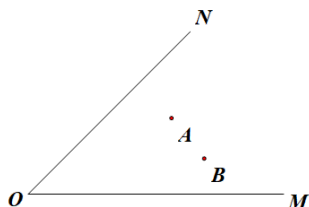
$\therefore \angle AMN + \angle ANM = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle MAN = 60^\circ$ 。

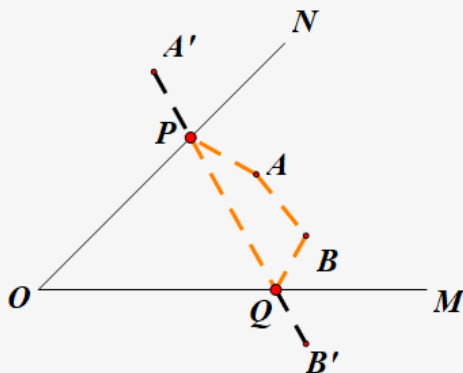
故答案为：120；60。

四、 四边形周长最小

如图，点 A 、 B 在锐角 $\angle MON$ 的内部，在 ON 边上求作一点 P ，在 OM 边上求作一点 Q ，使四边形 $ABQP$ 周长最小（或者使得 $PA + PQ + QB$ 最小）。

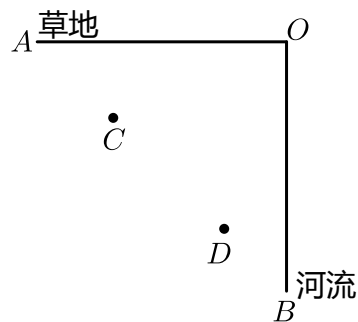


【备注】 作法：作点 A 关于 ON 对称的点 A' ，作点 B 关于 OM 对称的点 B' ，连接 A' 、 B' ，分别交 ON 于点 P ，交 OM 于点 Q 。



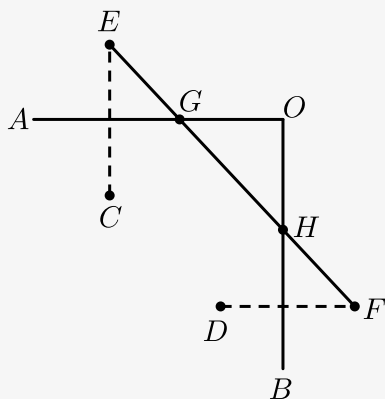
栗子6

10. 如图， C 为马厩， D 为帐篷，牧马人从马厩牵出马，先到草地边牧马，再到河边饮马，然后回到帐篷，请你帮他确定这一天的最短路线。



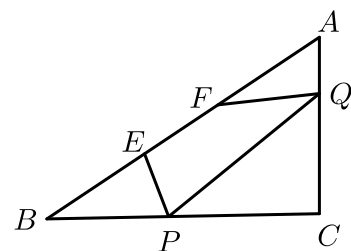
【答案】作图见解析．

【解析】作点 C 关于直线 OA 的对称点点 E ，
作点 D 关于直线 OB 的对称点点 F ，
连接 EF 分别交直线 OA 、 OB 于点 G 、 H ，则 $CG + GH + DH$ 最短．



【标注】【知识点】线段和的最小值

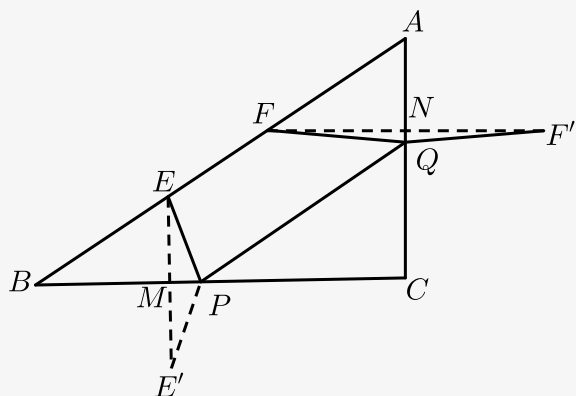
11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AC \perp BC$ ， $\angle B = 30^\circ$ ，点 E 、 F 是线段 AB 的三等分点，点 P 是线段 BC 上的动点，点 Q 是线段 AC 上的动点，若 $AC = 3$ ，则四边形 $EPQF$ 周长的最小值是 _____ ．



【答案】8

【解析】

作点 F 关于 AC 做的对称点 F' ，作点 E 关于 BC 的对称点 E' ，连接 $E'F'$ ，



连接 EE' 交 BC 于 M ，连接 FF' 交 AC 于 N ，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle B = 30^\circ$ ， $AC = 3$ ，

$\therefore AB = 6$ ，

又点 E 、 F 是线段 AB 的三等分点，

$\therefore EF = \frac{1}{3}AB = 2$ ，

$\therefore$ 当四边形 $EPQF$ 周长最小时，即 $EF + FQ + QP + PE = EF + F'Q + QP + PE'$ 最小，

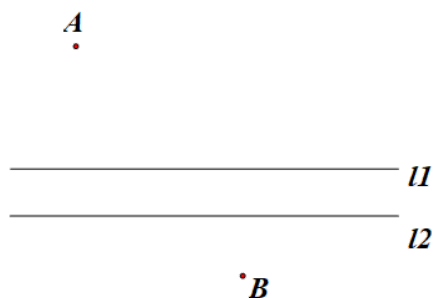
当 E' 、 P 、 Q 、 F' 共线时，达到最小，

此时周长为 $EF + E'F' = EF + AB = 2 + 6 = 8$ 。

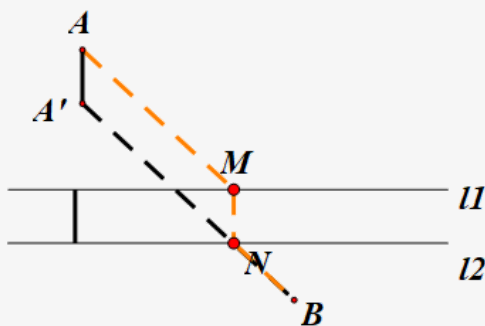
【标注】【知识点】四边形周长最小

五、过河问题

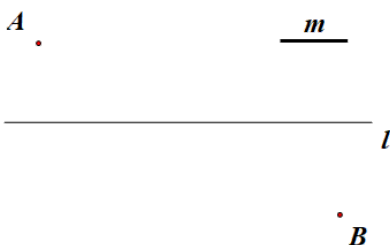
1、如图，在一组平行线 l_1 、 l_2 两侧各有一点 A 、 B ，在 l_1 、 l_2 间找一条线段 MN ，使 $MN \perp l_1$ ，并且使得 $AM + MN + NB$ 之和最短。



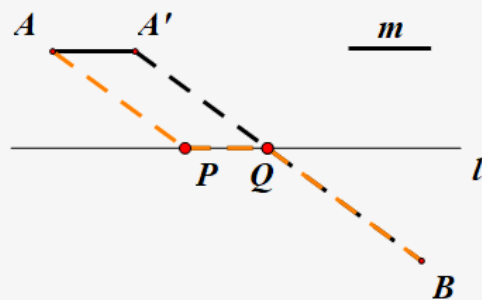
【备注】作法：将点 A 向下平移 l_1l_2 的宽度得到点 A' ；连接 A' 、 B ，与 l_2 交于点 N ，过点 N 作 $NM \perp l_1$ ，交 l_1 于点 M 。



2、如图，直线 l 外有两点 A 、 B ，有一定长线段 m ，在直线上找到点 P 、 Q ，使得 PQ 间的距离等于定长 m ，且使得 $AP + PQ + QB$ 最小。



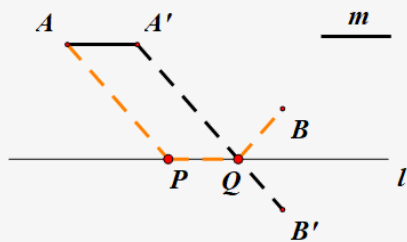
【备注】作法：将点 A 向右平移 m 的长度得到点 A' ；连接 A' 、 B ，交 l 于点 Q ，将点 Q 向左平移 m 的长度，得到点 P 。



3、如图，直线 l 外有两点 A 、 B ，有一定长线段 m ，在直线上找到点 P 、 Q ，使得 PQ 间的距离等于定长 m ，且使得 $AP + PQ + QB$ 最小（或者使得四边形 $APQB$ 周长最小）。

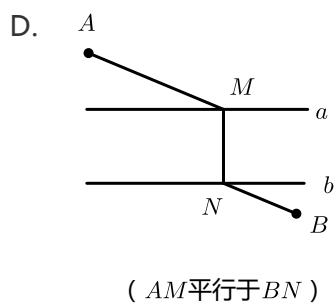
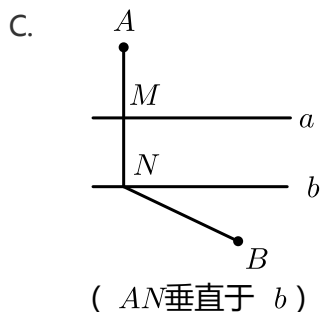
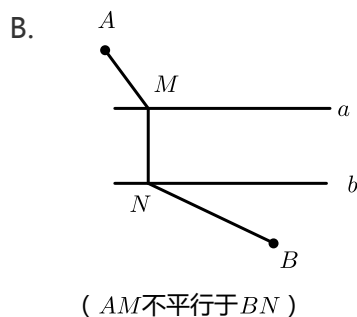
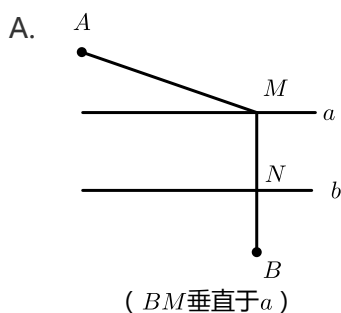


【备注】作法：将点 A 向右平移 m 的长度得到点 A' ，作点 B 关于 l 的对称点 B' ；连接 A' 、 B' ，交 l 于点 Q ，将点 Q 向左平移 m 的长度，得到点 P 。



栗子7

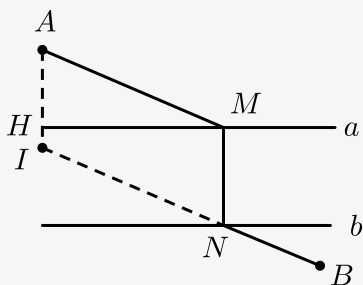
12. A 和 B 两地在一條河的兩岸，現要在河上造一座橋 MN ，使從 A 到 B 的路徑 $AMNB$ 最短的是（假定河的兩岸是平行線，橋與河岸垂直）（ ）。



【答案】D

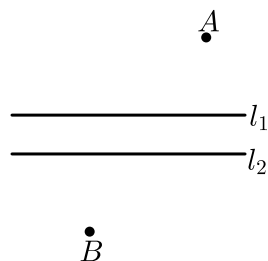
【解析】根據垂線段最短，得出 MN 是河的寬時， MN 最短，即 $MN \perp$ 直線 a （或直線 b ），只要 $AM + BN$ 最短就行，

即過 A 作河岸 a 的垂線 AH ，垂足為 H ，在直線 AH 上取點 I ，使 AI 等於河寬。連接 IB 交河岸 b 於 N ，作 MN 垂直河岸 a 於 M ，所得 MN 即為所求。



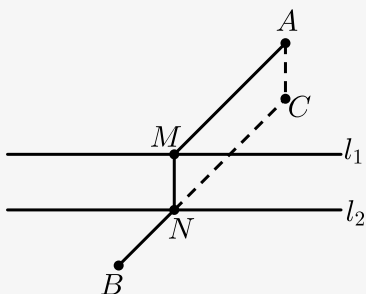
【标注】【知识点】造桥问题

13. 如图， A 、 B 两地在一条河的两旁，现要在河上造一座桥 MN ．桥造在何处才能使从 A 到 B 的路径 $AMNB$ 最短？（假定河的两岸是平行的直线，桥 MN 与河岸垂直）



【答案】作图见解析．

【解析】设河宽为 d ，作 $AC \perp l_1$ 且 AC 等于两河之间的距离；连接 CB 交 l_2 于 N 点；作 $MN \perp l_2$ 交 l_1 于 M 点；连接 AM ，则路线 $AMNB$ 最短．



【标注】【知识点】轴对称的定义

【知识点】平移的定义

14. 解答．

（1）如图③，点 M 、 N 在直线 l 同侧，请你在直线 l 上画出两点 O 、 P ，使得 $OP = 1\text{cm}$ ，且 $MO + OP + PN$ 的值最小．

（保留作图痕迹，不写作法）

